السّؤال الأوّل: (30 درجة):

أجب عن الأسئلة الآتية:

١. أوجد التمثيل الأسي للعدد العقدي $z=3-3i$.

٢. ليكن t وسيطاً حقيقياً و $\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}[$ عدداً حقيقياً ولنفرض أنَّ $Z_0=x_0+iy_0$، صف المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي تحقق العلاقة $Z=Z_0+te^{i\alpha}$.

٣. اكتب بالشّكل: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ الدالّة العقديّة: $f(z)=z.e^{z}$.

سنوجد التمثيل الأسي للعدد المركّب $z=3-3i$. لدينا $r=\sqrt{3^2+(-3)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ ويكون: $\cos\varphi=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ وبالتالي $\varphi=\frac{\pi}{4}$ وبما أنّ النقطة z تُمثّل في الربع الرابع فإنّ: $\text{Arg}(Z)=-\frac{\pi}{4}$ وبالتالي: $z=3\sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{4}}=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$	10 درجات
بفرض $Z=x+iy$ عندئذٍ تصبح العلاقة المفروضة بالشكل : $x+iy=x_0+iy_0+t(\cos\alpha+i\sin\alpha) \Leftrightarrow (x-x_0)+i(y-y_0)=t\cos\alpha+it\sin\alpha$ وبالتالي: $(x-x_0)=t\cos\alpha \quad and \quad (y-y_0)=t\sin\alpha$ ومنه: $\frac{(x-x_0)}{\cos\alpha}=t \quad and \quad \frac{(y-y_0)}{\sin\alpha}=t$ وبالتالي: $\frac{(x-x_0)}{\cos\alpha}=\frac{(y-y_0)}{\sin\alpha} \Leftrightarrow (y-y_0)=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x-x_0) \Leftrightarrow (y-y_0)=\tan\alpha\,(x-x_0)$ وبالتالي المحل الهندسي لمجموعة النقاط المفروضة هو حزمة المستقيمات التي تمر من النقطة $(x_0\ ,\ y_0)$ وميل كل مستقيم منها $\tan\alpha$.	10 درجات

من أجل $f(z)=z\,e^{z}$ فإنّنا نفرض $z=x+iy$ ويكون: $$f(z)=(x+iy)e^{x+iy}=(x+iy)e^{x}(\cos y+i\sin y)$$ $$=e^{x}\left[(x\cos y-y\sin y)+i(x\sin y+y\cos y)\right]$$ $$=e^{x}(x\cos y-y\sin y)+i\,e^{x}(x\sin y+y\cos y)$$ وبالتالي يكون: $$u(x,y)=e^{x}(x\cos y-y\sin y)$$ $$v(x,y)=e^{x}(x\sin y+y\cos y)$$	10 درجات

السّؤال الثاني:(30 درجة): أجب عن السؤالين الآتيين:

١. أثبت انّ الدالّة $f(z)=\left(x^{2}+5x-6-y^{2}\right)+i(2xy+5y-4)$ هي دالة تحليليّة, ثمّ أوجد مشتقّها.

٢. أثبت أنّ الدالّة:

$$u(x,y)=2xy+5y+1$$

هي دالّة توافقيّة, أوجد مرافقها التوافقي, ثمّ أوجد الدالّة التحليلية التي يكون قسمها الحقيقي هو الدالّة u

واضح أن: $$u(x,y)=x^{2}+5x-6-y^{2}$$ $$v(x,y)=2xy+5y-4$$ لدينا: $$u_x=2x+5\quad,\quad v_y=2x+5$$ $$u_y=-2y\quad,\quad v_x=2y$$ واضح أنّ: $u_x=v_y\ ,\ u_y=-v_x$ وبالتالي فإنّ شروط كوشي ريمان محقّقة, وهذا يعني أنّ الدالّة f تحليليّة. $$f'(z)=u_x+iv_x=(2x+5)+i(2y)$$ نبدّل كل z بـ x, وكل 0 بـ y: $$f'(z)=2z+5$$	10 درجات
لنوجد المشتقّات الجزئيّة: $$u_x=2y\quad,\quad u_{xx}=0$$ $$u_y=2x+5\quad,\quad u_{yy}=0$$ واضح إنّ: $u_{xx}+u_{yy}=0$ وبالتالي فإنّ الدالّة $u=u(x,y)$ هي دالّة توافقيّة. نبحث عن المرافق التوافقي $v=v(x,y)$ لـ u والذي يحقّق مع u شرطي كوشي ريمان. $$u_y=-v_x\ ,\ u_x=v_y$$	10 درجات

10 درجات	وبالتالي يكون: $$v_x = -2x - 5 \qquad (1)$$ $$v_y = 2y \qquad (2)$$ نكامل (1) بالنسبة لـ x فنجد: $$v(x,y) = -x^2 - 5x + g(y)$$ نشتق بالنسبة لـ y فنجد: $v_y = g'(y)$ بالمقارنة مع (2), نجد: $2y = g'(y)$ وبالتالي فإنّ: $g(y) = y^2 + c$ وبالتالي يكون: $$v(x,y) = -x^2 - 5x + y^2 + c$$ وتكون الدالّة التحليلية المطلوبة هي: $$f(z) = u(x,y) + i.v(x,y) = (2xy + 5y + 1) + i.(-x^2 - 5x + y^2 + c)$$ **نستبدل كل z بـ x وكل 0 بـ y, نجد:** $$f(z) = 1 + i(-z^2 - 5z + c)$$

السّؤال الثالث:(30 درجة): أجب عن الأسئلة الآتية:

١. أثبت أنّ المتتالية التي حدّها العام $a_n = \dfrac{5n}{n+3}$ متقاربة من $a = 5$.

٢. ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$.

٣. أوجد منشور الدالّة $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ في الجوار $|x| < 0$ للصفر.

10 درجات	مهما يكن $\varepsilon > 0$, نبدأ من المتراجحة $\|a_n - 5\| < \varepsilon$ وذلك على اعتبار أنّ كل حدود المتتالية تقع ضمن الجوار الذي مركزه 5 ونصف قطره ε. $$\left\|\frac{5n}{n+3} - 5\right\| < \varepsilon \Leftrightarrow \left\|\frac{5n - 5n - 15}{n+3}\right\| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{15}{n+3} < \varepsilon$$ $$\frac{n+3}{15} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{15}{\varepsilon} - 3$$ وبالتالي: $$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon = \left[\frac{15}{\varepsilon} - 3\right] > 0 ;\ n > N_\varepsilon \Rightarrow \|a_n - 5\| < \varepsilon$$ فالمتتالية متقاربة من الواحد.

مدرس المقرر
د. باسل العرنوس

عميد الكلية
د. نورس الهلامي

سلّم التصحيح

الدرجة: 100 مئة

لدراسة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$. نأخذ: $$\rho=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$ فالمتسلسلة متقاربة بحسب اختبار دالامبير.	10 درجات
على المجال $]-1,1[$ يكون: $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ نبدّل كل x بـ $-x^2$ فنجد: $$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$ بضرب الطرفين بـ x نجد: $f(x)=\frac{x}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}$.	10 درجات

السّؤال الرابع: (10 درجات):

أوجد منشور لورانت للدالّة $z\mapsto f(z)=\frac{2}{z^2+4z+3}$ على المنطقة: $|z|>3$.

إنّ الدالّة f تُكتب بالشّكل: $f(z)=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+3}$ بما أنّ: $|z|>3$ فإنّ: $\left\|\frac{1}{z}\right\|<\frac{1}{3}<1$ وبالتالي يكون: $$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{z^n}$$ وبما أنّ: $|z|>3$ فإنّ: $\left\|\frac{z}{3}\right\|>1$ وبالتالي يكون $\left\|\frac{3}{z}\right\|<1$, وعليه: $$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^n\frac{1}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}3^{n-1}\frac{1}{z^n}$$ وبالتالي يكون: $$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{z^n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}3^{n-1}\frac{1}{z^n}$$ أو بالشّكل: $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1-3^{n-1}\right)\frac{1}{z^n}$	10 درجات

انتهى السلّم

مدرس المقرر
د. باسل العرنوس

عميد الكلية
د. نورس الهلامي